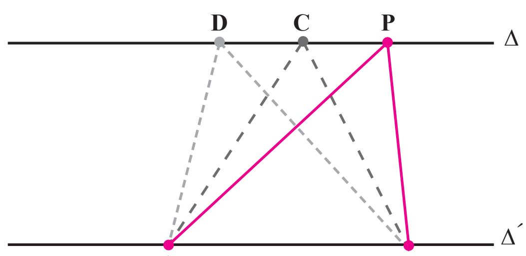
قضیهٔ پیک در حالت‌های خاص

خشایار کاویانپور
دانشجوی
کارشناسی ارشد ریاضی

با قضیهٔ پیک در فصل سوم هندسه دهم آشنا شده‌اید. می‌خواهیم به کاربرد و یافتن مساحت‌ها در مسائلی که به قضیهٔ پیک مربوط‌اند، بپردازیم. ابتدا به دو نکتهٔ کلیدی اشاره می‌کنیم:



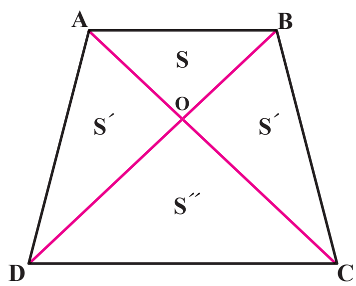
۱

الف) دو خط موازی Δ و ´Δ مفروض‌اند. اگر نقاط A و B را واقع بر ´Δ در نظر بگیریم، آن‌گاه از هر نقطهٔ متعلق به Δ مانند P، C و D به A و B وصل کنیم، مساحت مثلث‌های PAB، CAB و DAB با هم برابر است:

$$\Delta \parallel \Delta' \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{PAB}} = S_{\overset{\Delta}{CAB}} = S_{\overset{\Delta}{DAB}}$$

ب) در هر ذوزنقه مانند ABCD داریم: (O محل تلاقی قطرها)

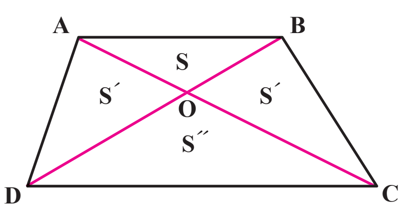
$S'^2 = SS''$ (قضیهٔ شبه پروانه)



۲

اثبات: با توجه به الف داریم:

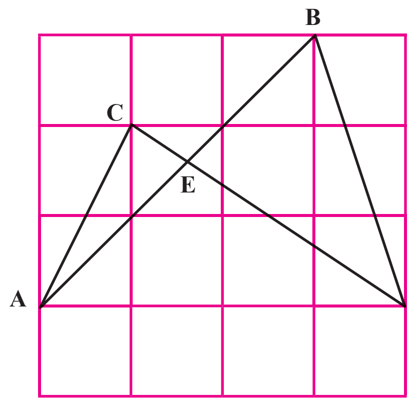
$$S_{ABC} = S_{ABD} \Rightarrow S_{ABC} - S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOB}$$
$$\Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC} = S', \hat{AOB} = \hat{COD} = \alpha$$
$$S_{AOB} \times S_{COD} = (\frac{1}{2}AO.OB.\sin\alpha)(\frac{1}{2}OC.OD.\sin\alpha)$$
$$= (\frac{1}{2}OB.OC.\sin\alpha)(\frac{1}{2}AO.OD.\sin\alpha)$$
$$= (\frac{1}{2}OB.OC.\sin(180-\alpha))(\frac{1}{2}AO.OD.\sin(180-\alpha))$$
$$= S_{AOD}.S_{OBC} = S' \times S' = S'^2 \Rightarrow S.S'' = S'^2$$



۳

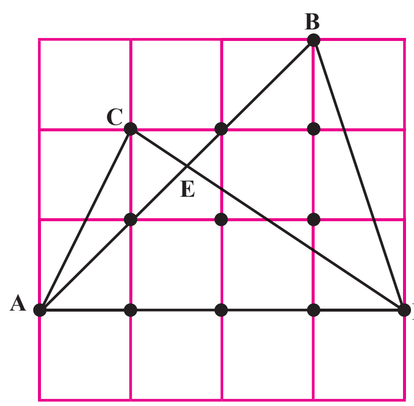
حال به حل چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱. در شــکل ۴ پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را در E قطع کرده‌اند که E شــبکه‌ای نیست. حاصل $S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}}$ را بیابید.



۴

حل: E شــبکه‌ای نیســت، ولی نقاط A، B، C و D شبکه‌ای هســتند. از D به A وصل می‌کنیم. دو مثلث BAD و CAD شــبکه‌ای هســتند و در مثلث EAD مشترک‌اند. لذا:



۵

$$S_{\overset{\Delta}{BAD}} - S_{\overset{\Delta}{CAD}} = S_{\overset{\Delta}{BED}} + \cancel{S_{\overset{\Delta}{EAD}}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} - \cancel{S_{\overset{\Delta}{EAD}}}$$
$$= S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} \quad (۱)$$

با استفاده از دستور پیک داریم:

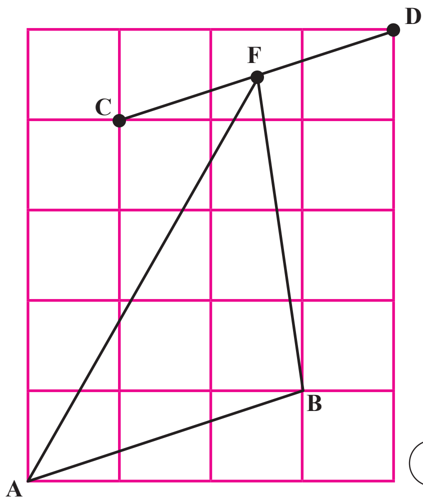
$$S_{\overset{\Delta}{BAD}} = \frac{۸}{۲} + ۳ - ۱ = ۶, S_{\overset{\Delta}{CAD}} = \frac{۶}{۲} + ۲ - ۱ = ۴$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} = ۶ - ۴ = ۲$$

(می‌توانســتیم از B به C وصل کنیم و مسئله را از این راه هم حل کنیم.)

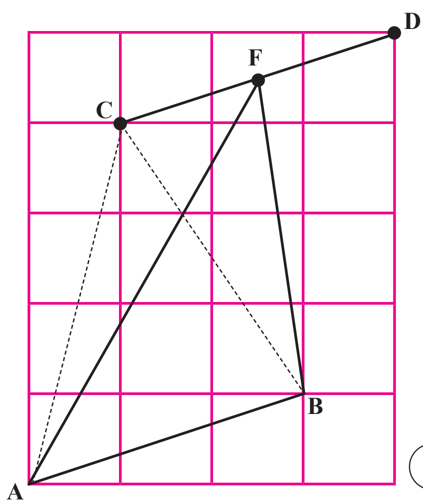
مثال ۲. در شــکل ۶ که بخشی از یک شبکه را نشان می‌دهد، نقــاط A، B، C و D شــبکه‌ای‌اند ولی F شبکه‌ای نیست. اگر: CF=FD مساحت مثلث FAB چقدر است؟



۶

حل: ابتدا توجه می‌کنیم کــه AB و CD موازی‌اند (زیرا شیب‌های یکسانی دارند). با توجه به قسمت (الف)، چون AB و CD موازی‌اند و F نقطه‌ای روی CD است، اگــر از C به A و B وصل کنیم، مســاحت مثلث‌های FAB و CAB برابر است: $S_{\overset{\Delta}{FAB}} = S_{\overset{\Delta}{CAB}}$

مثلث CAB شبکه‌ای اســت و ۳ نقطهٔ مرزی و ۵ نقطهٔ درونی دارد. بنابراین:

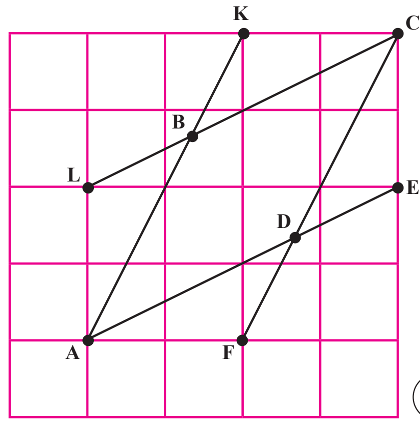


۷

$$S_{\overset{\Delta}{FAB}} = \frac{۵}{۲} + ۳ - ۱ = ۴/۵$$

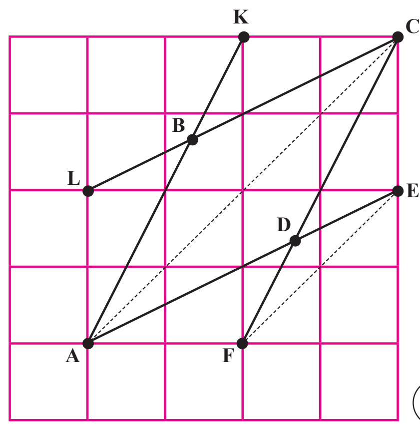
(می‌توانستیم از D به A و B وصل کنیم و مسئله را از این راه هم حل کنیم.)

مثال ۳. در شبکهٔ شکل ۸ مساحت چهارضلعی ABCD را که در آن نقاط A و C شبکه‌ای هستند، اما B و D شبکه‌ای نیستند، بیابید.



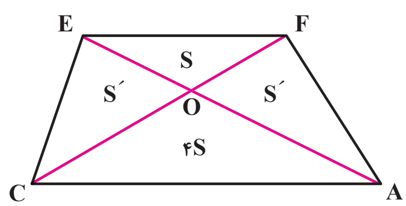
۸

حل: ابتدا توجه کنید: CD||AB و CB||AD. یعنی ABCD متوازی‌الاضلاع است. از C به A و از E به F وصل می‌کنیم EF و CA موازی‌اند. لذا چهارضلعی FECA ذوزنقه است. از طرف دیگر، داریم: AC=۲EF. (چرا؟) از تشابه $\overset{\Delta}{EDF}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:



۹

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{EDF}}} = (۲)^{۲} = ۴$$



۱۰

طبق قضیهٔ شبه پروانه در ذوزنقه داریم:

$$S'^{۲} = S\times ۴S \Rightarrow S' = ۲S$$

مساحت ذوزنقهٔ شبکه‌ای FECA:

$$A = \frac{۱۰}{۲} + ۲ - ۱ = ۶$$

بنابراین:

$$۹S = ۶ \Rightarrow S = \frac{۶}{۹} \Rightarrow ۴S = \frac{۲۴}{۹} = \frac{۸}{۳}$$

حال توجه می‌کنیم که:

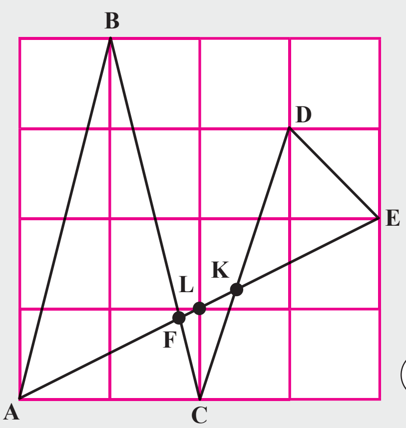
$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ADCB}}$$

در نهایت مساحت متوازی‌اضلاع ADCB برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ADCB}} = ۲\times\frac{۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

تمرین

در شبکهٔ شکل ۱۱ پاره‌خط AE، پاره‌خط‌های DC و BC را در نقاط غیرشبکه‌ای K و F قطع کرده است و از نقطهٔ شبکه‌ای L می‌گذرد. حاصل $S_{\overset{\Delta}{ABF}} + S_{\overset{\Delta}{DEK}} - S_{\overset{\Delta}{CFK}}$ چقدر است؟



۱۱

پاسخ: ۴

*منبع

Euclidean and Transformational Geometry: Adeductive inquiry.